Prijatelji in politiki

Tanja Ritovšek

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

29. maj 2009

Izrek o prijateljih in politikih

Izrek o prijateljih in politikih

O začetkih

- Začetki razmišljanja segajo v zgodnja leta raziskovanja na področju teorije grafov.
- Prva pojavitev izreka z dokazom: leta 1966 v *Madžarskem dnevniku*: *P. Erdős*, *A. Rényi* in *V. Sós*.
- Druga pojavitev: leta 1969 s strani *H. Wilfa*.

Izrek o prijateljih in politikih

O začetkih

- Začetki razmišljanja segajo v zgodnja leta raziskovanja na področju teorije grafov.
- Prva pojavitev izreka z dokazom: leta 1966 v *Madžarskem dnevniku*: *P. Erdős*, *A. Rényi* in *V. Sós*.
- Druga pojavitev: leta 1969 s strani *H. Wilfa*.

Kam spada?

. . . je izrek s področja *Ramseyjeve teorije/naukov*.

Osnovno o grafih

Osnovno o grafih

Graf, stopnja točke, regularnost

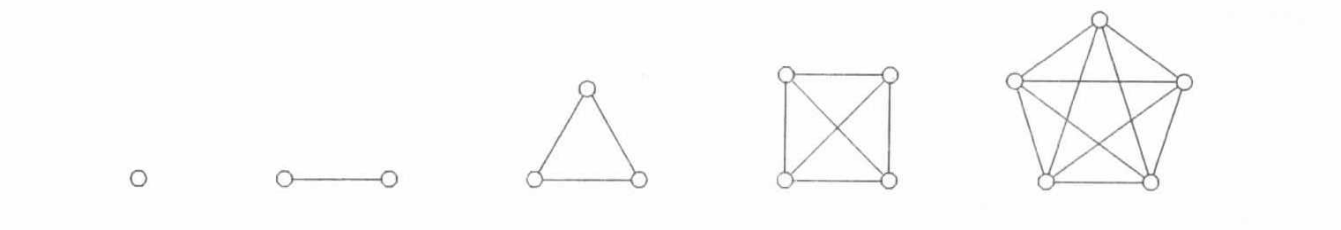
- Naj bo V končna neprazna množica in P poljubna družina dvoelementnih podmn. mn. V. Paru $G = (V, P)$ pravimo graf na množici točk $V = V(G)$ z množico povezav $P = P(G)$
- Stopnja točke u grafa G je enaka številu povezav grafa G, ki imajo točko u za svoje krajišče. Najmanjšo stopnjo točke grafa G označimo z $\delta(G)$, največjo pa z $\Delta(G)$.
- Graf G je regularen, če velja $\delta(G) = \Delta(G)$ in je d-regularen, če velja $d = \delta(G) = \Delta(G)$

Osnovno o grafih

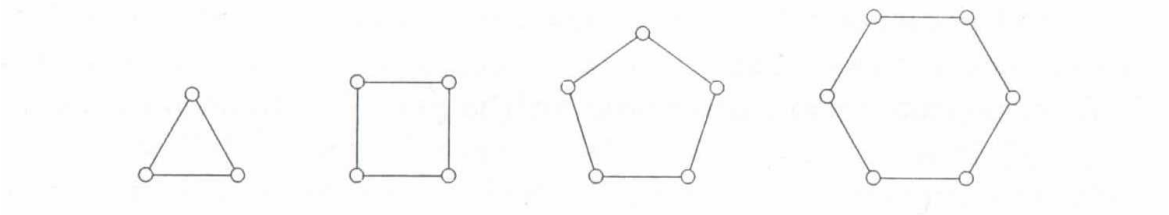
Sosednji točki, sosednji povezavi

- Točki u in v sta sosednji, kadar je par točk $uv = \{u, v\}$ element množice P v grafu G.
- Sosednji povezavi sta povezavi, ki imata skupno krajišče.

Nekatere družine grafov: polni grafi in cikli



Polni grafi: K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 in cikli: C_3, C_4, C_5, C_6



Motivacija, izvor imena

Motivacija, izvor imena

Kdo je politik?

Predstavljajmo si, da imamo v skupini ljudi naslednjo situacijo, in sicer: vsak par oseb iz te skupine ima natanko enega skupnega prijatelja.
Iz tega sledi, da torej vedno obstaja oseba, ki je vsakomur prijatelj.
To osebo imenujemo politik. Zato v matematičnem žargonu pravimo tej teoriji oz. izreku Izrek o prijateljih in politikih.

Naš problem

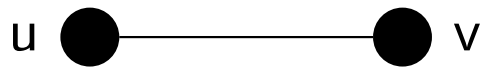
Naš problem

Podajmo torej skupino ljudi kot množico vozlišč V in povežimo dve vozlišči s črto, če sta ustrezni osebi prijatelja.

Naš problem

Podajmo torej skupino ljudi kot množico vozlišč V in povežimo dve vozlišči s črto, če sta ustrezni osebi prijatelja.

Privzemimo, da je prijateljstvo obojestransko; torej če je u prijatelj z v, potem je tudi v prijatelj z u. Privzemimo še, da nihče ni samosvoj prijatelj (prijatelj le sam s seboj).



Izrek o prijateljstvu in politikih

Izrek o prijateljstvu in politikih

Izrek

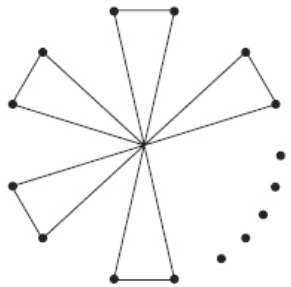
Predpostavimo, da je G graf, v katerem imata vsaki dve vozlišči natanko enega skupnega soseda. Torej obstaja vozlišče, ki je sosednje vsem ostalim vozliščem.

Izrek o prijateljstvu in politikih

Izrek

Predpostavimo, da je G graf, v katerem imata vsaki dve vozlišči natanko enega skupnega soseda. Torej obstaja vozlišče, ki je sosednje vsem ostalim vozliščem.

Grafe s to lastnostjo imenujemo "windmill"-grafi oz. vetrnice.



Dokaz s protislovjem: *Erdős, Rényi, Sós*

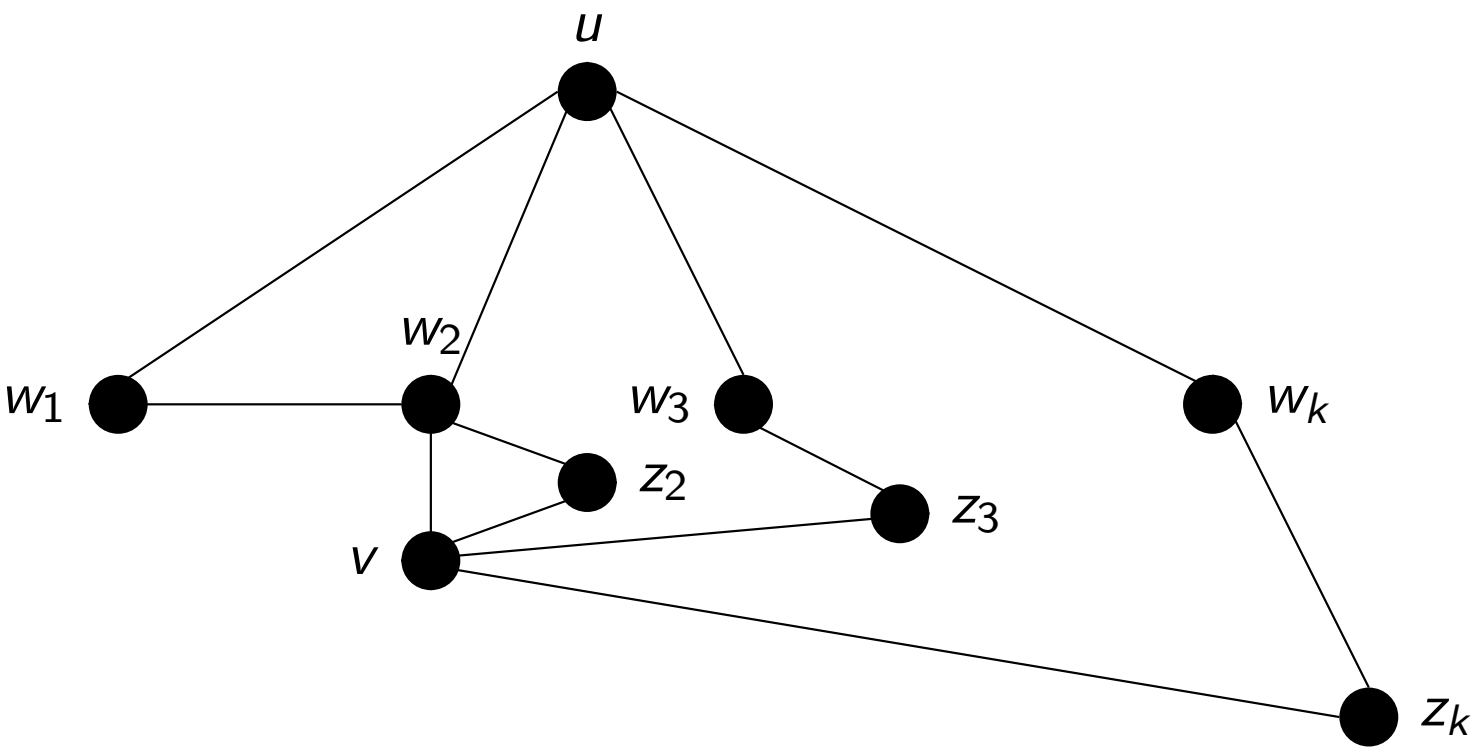
Dokaz s protislovjem: *Erdős, Rényi, Sós*

1.korak - kombinatorika: (povzetek)

- V množica vozlišč
- G regularen graf
- St.(u) = st.(v) za $\forall u, v$, ki nista sosednji vozlišči
- Stopnje enake k, graf G je k-regularen
- Število vseh vozlišč grafa je enako $n = k^2 - k + 1$

Zgled:

Zgled:



Dokaz s protislovjem: *Erdős, Rényi, Sós*

Dokaz s protislovjem: *Erdős, Rényi, Sós*

2.korak - lin. algebra: (povzetek 1)

- $k > 2$!!!, $k \leq 2$ - trivialna grafa
- G regularen graf
- V množica vozlišč $= \{v_1, \ldots, v_m\}$
- P množica povezav med vozlišči
- Matrika sosednosti: $A = (a_{ij})$ definirana kot:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če } v_i v_j \text{ element } P, \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases}$$

Dokaz s protislovjem: *Erdős, Rényi, Sós*

Dokaz s protislovjem: *Erdős, Rényi, Sós*

2.korak - lin. algebra: (povzetek 2)

- $$A^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & \dots & 1 \\ 1 & k & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & k \end{pmatrix} = (k-1)I + J,$$

  kjer je I identiteta in J matrika samih enic.
- J ima lastni vrednosti n (st. 1) in 0 (st. $n-1$)
- A^2 ima l. v. $k-1+n = k^2$ (st. 1) in $k-1$ (st. $n-1$)
- A simetrična, ima l. v. k (st. 1) in $\pm\sqrt{k-1}$ (st. $n-1$)

Dokaz s protislovjem: *Erdős, Rényi, Sós*

Dokaz s protislovjem: *Erdős, Rényi, Sós*

2.korak - lin. algebra: (povzetek 3)

- r lastnih vrednosti enakih $\sqrt{k-1}$ in s od njih enakih $-\sqrt{k-1}$, tako da $r+s=n-1$
- vsota lastnih vrednosti $A=0$
- $k+r\sqrt{k-1}-s\sqrt{k-1}=0$
- $r \neq s$: $\sqrt{k-1}=\frac{k}{s-r}$
- $\sqrt{k-1}$ celo število h
- h deli h^2+1 in $h^2 \Rightarrow h=1 \Rightarrow k=2 \Rightarrow$ PROTISLOVJE!!!

Kotzigova domneva

Kotzigova domneva

Kotzigova domneva

Naj bo $l > 2$. Potem ne obstajajo grafi z lastnostjo, da med vsakima dvema vozliščema obstaja natanko ena pot dolžine l.

Kotzigova domneva

Kotzigova domneva

Naj bo $l > 2$. Potem ne obstajajo grafi z lastnostjo, da med vsakima dvema vozliščema obstaja natanko ena pot dolžine l.

Kotzig je sam dokazal to domnevo za $l \leq 8$. S pomočjo "pametnega" štetja sta *Xing* in *Hu* dokazala za vse $l \geq 12$. Preostale primere pa so pred kratkim dokončali *Yang*, *Lin*, *Wang* in *Li*.

Kotzigova domneva je tako postala izrek!